2023/11/09/No.8

線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　和の記号

$$\sum_{k=1,2,3} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$$

と同様に積の記号

$$\prod_{k=1,2,3} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3$$

を定義する.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

とする. 次の値を求めよ.

(1)

$$\prod_{k=1,2,3} a_k$$

(2)

$$\prod_{1 \le j \le 3} a_{1j} \quad \left(\text{つまり} \prod_{j=1,2,3} a_{1j} \text{のこと} \right)$$

(3)

$$\prod_{1 \le i \le 3} a_{i2} \quad \left(\text{つまり} \prod_{i=1,2,3} a_{ij} \text{のこと} \right)$$

(4)

$$\prod_{1 \le i < j \le 3} a_{ij} \quad \left(\text{つまり} \prod_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)} a_{i2} \text{のこと} \right)$$

問 2　$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ とする

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 3} (\lambda_j - \lambda_i)$$

を計算によって確かめよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 3　$n \in \mathbb{N}$ を 2 以上の自然数とし, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とする．次の**ヴァンデルモンドの行列式**を数学的帰納法によって証明せよ [1]．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

問 4　A を n 次正方行列とし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値とする．ただし, 固有値が重複する場合にはその分だけ分けておき固有値の個数を n 個になるようにしておく．このとき次が成立することを, $n = 2$ のときを参考にして $n = 3$ のときを証明せよ:

(i) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$　$(= \mathrm{tr}A$ とかき A のトレースと呼ぶ$)$;

(ii) $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \cdots \times \lambda_n = \mathrm{detA}$　$(= |A|)$.

参考にする証明の例　$n = 2$ のとき．固有値を求める方程式は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A \end{aligned} \tag{1}$$

である．そこで, この式を

$$g(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

(これを固有多項式とよび $g(\lambda) = 0$ を固有方程式とよんだりする) と定義し, λ_1, λ_2 を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1) = 0, \quad g(\lambda_2) = 0$$

を満たす．よって, $g(\lambda)$ は λ の 2 次式で λ^2 の係数は 1 なので

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \tag{2}$$

の形をしていることが分かる．(1) と (2) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}A, \quad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{detA}$$

を得る．

[1] ヒント: 行列の基本変形によって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_n^2 - \lambda_n\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_2^{n-2}\lambda_1 & \lambda_3^{n-1} - \lambda_3^{n-2}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_n^{n-2}\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (2) - \lambda_1 \times (1) \\ (3) - \lambda_1 \times (2) \\ \\ (n) - \lambda_1 \times (n-1) \end{array}$$

と変形できるので求める行列式は変形後の行列の行列式と一致する．