線形代数及び演習 II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ なる連立方程式を考える. $\lambda = 2$ について

$$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

から $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\lambda = 2$ は A の固有値ではない. 次の問いに答えよ.

(1) $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 0$ はそれぞれ A の固有値か否か調べよ.

(2) (1) から得られた固有値 λ に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) $(A - 1I)^{-1}$, $(A - 5I)^{-1}$, $(A - 0I)^{-1}$ が存在するか否か調べよ.

問 2　n 次正方行列 A に対して λ が A の固有値になるための必要十分条件は $A - \lambda I$ が正則ではない, つまり逆行列を持たないことである. 例題を参考に次の行列の固有値をすべて求めよ.

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0.$$

これを解いて

$$(\lambda-3)(\lambda-1) - 8 = 0,$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = 0,$$
$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$
$$(\lambda-5)(\lambda+1) = 0,$$
$$\lambda = 5, -1.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

以上より A の固有値は $\lambda = 5$ と $\lambda = -1$.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$