線形代数及び演習II・自習シート

問1　$V=\mathbb{R}^3$ とし, $\boldsymbol{x}={}^{\mathsf{T}}(x_1,x_2,x_3):=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とかくことにする. 次の V の部分集合 W についてそれぞれ V の線形部分空間か否か判定せよ.

(1)
$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:3x_1-2x_2+4x_3=0\}$$

(2)
$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:x_1+x_2+x_3\geq 0\}$$

(3)
$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:x_1+x_2+x_3\text{は整数である}\}$$

(4)
$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:2x_1+3x_2-5x_3=0,x_2+7x_3=0\}$$

問2　V を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値をとる関数全体とする. この V は, ${}^\forall f,g\in V$, ${}^\forall c\in\mathbb{R}$ に対して,

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$
$$(cf)(x):=c\times f(x)\quad(x\in\mathbb{R})$$

を和と定数倍, すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $o(x)=0$ という関数 o をゼロ元として線形空間となることが分かっている.

このとき, W を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値をとる**連続な**関数全体とすると, W は V の線形部分空間となることを示せ.

問3　$V=\mathbb{R}^3$ とし, $W\subset V$ は V の線形部分空間であると仮定する. このとき次の手順に沿って, W におけるゼロ元 $\mathbf{0}_W$ が V のゼロ元 $\mathbf{0}={}^{\mathsf{T}}(0,0,0)$ と一致することを示せ.

(i) W が線形空間であることを用いて, 線形空間 W のゼロ元 $\mathbf{0}_W$ に関する 2 条件 (講義中の (3) と (8)) を論理記号でかけ.
(3) ある $\mathbf{0}_W\in W$ が存在して, すべての $\boldsymbol{u}\in W$ に対して $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}_W=\mathbf{0}_W+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$;
(8) すべての $\boldsymbol{u}\in W$ に対して $0\boldsymbol{u}=\mathbf{0}_W$.

(ii) $0\mathbf{0}_W=\mathbf{0}_W$ を示せ.

(iii) V が線形空間であることを用いて, 線形空間 V のゼロ元 $\mathbf{0}$ に関する条件 (8) を論理記号でかけ.
(8) すべての $\boldsymbol{u}\in V$ に対して $0\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$.

(iv) $\mathbf{0}_W\in W$ が $W\subset V$ より V の元でもあることを用いて (iii) において $\boldsymbol{u}$ として $\mathbf{0}_W$ を選ぶことで $\mathbf{0}_W=\mathbf{0}$ を示せ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.