2023/09/20/No.2

線形代数及び演習II・自習シート

問1　次の例に従って集合のすべての元を列挙する形で書き直せ.
(例)

$$A := \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10, \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = 2m\}$$

このとき A はすべての元を列挙する形で

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

と書き直せる.
(解説)A の元はまず間違いなく自然数 $\mathbb{N}$ の元である (大前提, $n \in \mathbb{N}$ の部分). そして, 後半にある

$$1 \leq n \leq 10$$

と

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = 2m$$

を同時に満たすものだけが A の元である. よって $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. なお, 「$\leq$」の記号は「≦」のことであり, 逆の「≧」も「$\geq$」で書くことにする.

(1) $A := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 10, \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k = 2m\}$

(2) $B := \{q \in \mathbb{Q} : \exists n, m \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ s.t. } q = n/m\}$, ただし $\mathbb{Q}$ は有理数全体を意味し, n/m とは $\frac{n}{m}$ のこと.

(3) $C := \{f \in \mathbb{N}[x]_2 : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0, f(x) \leq 5, \}$. ただし, $\mathbb{N}[x]_2$ は自然数を係数に持つ 2 次多項式全体を意味する.

(4) $D := \{f \in \mathbb{N}[x]_2 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 5\}$.

問2　V を区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値をとる連続な関数全体とする (例えば, $f(x) := x^2, g(x) := \sin x, h(x) := e^x$ とおくと, いずれも $f, g, h \in V$ である. ここでは連続とはつながっている関数と考えて十分である). このとき, V の和 $f + g$ と定数倍 af を

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in [0, 1]),$$

$$(af)(x) := a \times f(x) \quad (x \in [0, 1]),$$

ただし, $f, g \in V$, $a \in \mathbb{R}$, で定義する (定義の意味をより詳しく説明すると, $f + g$ とは関数 f に x を代入した値 $f(x)$ と関数 g に x を代入した値をたすという新しい関数 $f + g$ を作っている. 定数倍も一緒). このとき, V は線形空間になるが, 特に以下の条件を証明せよ. (1) や (4) については解答例として載せておくのでこれをマネせよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(1) $\forall f, g \in V$,

$$f + g = g + f$$

解答例 関数 $f+g$ と $g+f$ が等しいことを示すにはどんな $x \in [0,1]$ に対しても $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ を示せばよい (それが関数 $f+g$ と $g+f$ が等しいことの定義だから). このとき $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \qquad &&(\text{和の定義}) \\ &= g(x) + f(x) &&(\text{実数における和の性質}) \\ &= (g+f)(x) &&(\text{和の定義}) \end{aligned}$$

よって $f+g = g+f$ が成立する.

(3) 関数 o を $o(x) = 0$ $(x \in [0,1])$, つまりずっと 0 という関数とする. このとき $\forall f \in V$,

$$f + o = f.$$

(4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall f \in V$,

$$a(bf) = (ab)f$$

解答例 関数 $a(bf)$ と $(ab)f$ が等しいことを示すにはどんな $x \in [0,1]$ に対しても $(a(bf))(x) = ((ab)f)(x)$ を示せばよい. このとき $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} (a(bf))(x) &= a \times ((bf)(x)) \qquad &&(\text{関数 } bf \text{ の定数 } a \text{ 倍の定義}) \\ &= a \times (b \times f(x)) &&(\text{関数 } f \text{ の定数 } b \text{ 倍の定義}) \\ &= (a \times b) \times f(x) &&(\text{実数における積の性質}) \\ &= ((ab)f)(x) &&(\text{関数 } f \text{ の定数 } ab \text{ 倍の定義}) \end{aligned}$$

よって $a(bf) = (ab)f$ が成立する.

(5) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall f \in V$,

$$(a+b)f = af + bf$$

(6) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in V$,

$$a(f+g) = af + ag$$

(7) $\forall f \in V$,

$$1f = f$$

(8) $\forall f \in V$,

$$0f = o$$

なお番号は線形空間の定義に用いた番号とそろえてある.

問 3　講義中に述べた 2 つの命題 P と Q について考察する.

$$P : \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ で } n \text{ は偶数 } \boxed{\exists m \in \mathbb{N};\ \text{s.t. } \boxed{n = 2m}}}$$

を論理記号を用いずに日本語でつらつらと表現すると,
「すべての偶数 (自然数) に対して, ある自然数 m が存在して, 偶数 n は $2m$ とかける, つ

まり $n=2m$」といった表現ができる．この命題は真である．実際，偶数 n を選ぶたびに (それに応じて決まる自然数 m_n が存在して)，偶数 n は $2m_n$ と表現できる．では

$$Q : \boxed{\exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ で } n \text{ は偶数}, \boxed{n = 2m}}}$$

を論理記号を用いずに日本語でつらつらと表現せよ．そしてその命題は偽であることを解説せよ (ヒント: そんな最強な自然数 m が存在するのか?)．