

線形代数及び演習 II ・ 自習シート

問1 $V := \mathbb{R}^{n \times n}$, つまり n 次正方行列とする. $A, B \in V$ に対して,

$$(A, B) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} \text{ のこと, つまり } a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{1n} + a_{21}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \right)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) (\cdot, \cdot) は V の内積になることを証明せよ.

(2)

$$(A, B) = \text{tr}({}^T A B)$$

となることを計算して確認せよ¹⁾.

問2 $V := C([a, b])$ または $\mathbb{R}[x]_n$ とする. $f, g \in V$ に対して,

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

とおくと, (\cdot, \cdot) は V の内積になることを証明せよ.

¹⁾ 提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$${}^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

のことであるので,

$${}^T A B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

に注意する. また tr は行列の対角成分の和を意味する.