線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　$a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ とし, $f, g \in C([a,b])$ を考える [1]. 次のミンコフスキーの不等式を手順に従い証明せよ:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

(i)

$$\alpha := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta := \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく. α か β の少なくともどちらか一方が 0 ならば (1) が成立していることを証明せよ.

(ii) $\alpha, \beta > 0$ とする. 新しく関数 $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) := \frac{1}{\alpha} f(x), \quad G(x) := \frac{1}{\beta} g(x)$$

とおく. このとき,

$$\left(\int_a^b |F(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \left(\int_a^b |G(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

を証明せよ.

(iii) いま,

$$\begin{aligned}
|f(x)+g(x)|^2 &\leq \big||f(x)| + |g(x)|\big|^2 \\
&= \left|\alpha \frac{1}{\alpha}|f(x)| + \beta \frac{1}{\beta}|g(x)|\right|^2 \\
&= \big|\alpha|F(x)| + \beta|G(x)|\big|^2 \\
&= (\alpha+\beta)^2 \left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}|F(x)| + \frac{\beta}{\alpha+\beta}|G(x)|\right|^2
\end{aligned}$$

が成立している. $\lambda := \alpha/(\alpha+\beta)$ とおき, 自習シート No.10 の問 1 の (2) を用いれば,

$$|f(x)+g(x)|^2 \leq (\alpha+\beta)\left(\alpha|F(x)|^2 + \beta|G(x)|^2\right)$$

が成立することを証明せよ.

(iv) ミンコフスキーの不等式 (1) を証明せよ.

問 2　$V := C([a,b])$ または $\mathbb{R}[x]_n$ とする. $f \in V$ に対して

$$\|f\| := \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$$

と定義すると, $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] つまり $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ で $[a,b]$ 上連続な関数全体.