2023/11/28/No.10

線形代数及び演習II・自習シート

問 1　$a, b \in \mathbb{R}$ とすると次のヤングの不等式

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

が成立する．これを用いて次の不等式を証明せよ．

(1) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とすると [1]

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

(2) $\lambda \in (0,1)$, $A, B \in \mathbb{R}$ とすると [2]

$$(\lambda A + (1-\lambda)B)^2 \leq \lambda A^2 + (1-\lambda)B^2.$$

問 2　$V := \mathbb{C}$ とする．$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|\alpha\| := \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ただし}, \alpha = a + bi$$

と定義すると，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{C}$ のノルムになることを証明せよ．

問 3　$V := C([0,1])$, すなわち区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体とする．$f \in C([0,1])$ に対して

$$\|f\| := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

と定義すると，$\|\cdot\|$ は $C([0,1])$ のノルムになることを証明せよ [3]．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] ヤングの不等式より

$$(a_1b_2)(a_2b_1) \leq \frac{1}{2}(a_1b_2)^2 + \frac{1}{2}(a_2b_1)^2$$

を用いるとよい．

[2] $\lambda \in (0,1)$ とすると $\lambda - \lambda^2 > 0$ なのでヤングの不等式

$$\lambda(1-\lambda)AB = \sqrt{\lambda - \lambda^2}A\sqrt{\lambda - \lambda^2}B \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^2)A^2 + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^2)B^2$$

を用いるとよい．

[3] $\max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ とは区間 $[0,1]$ 内の点 x に対する $|f(x)|$ の最大値を表す．例えば $f(x) = x^2 + 1$ ならば

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| = |f(1)| = 2.$$

$g(x) = -2x + 1$ ならば

$$\max_{x \in [0,1]} |g(x)| = |g(0)| = |g(1)| = 1$$