線形代数及び演習 II・自習シート

問　次の行列 A が対角化可能かどうか調べよ. ただし, 対角化可能であっても対角化まで行う必要はない.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\big(\lambda(\lambda+1)-4\big) - \big((\lambda+1)-4\big) - 2(-2+2\lambda) \\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-4) - \lambda + 3 - 4\lambda + 4 \\
&= (-\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda - 8) - 5\lambda + 7 \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \\
&= -(\lambda-1)(\lambda^2-1) \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

から, 固有値は $\lambda = 1, -1$ (1 が重複) と分かる.　(メモ $1+1+(-1) = \mathrm{tr}A = 2+(-1)$.)

$\lambda = 1$ について,

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (2)-(1) \\ (3)+2\times(1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (3)\times(1/2) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)-2\times(2) \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

よって

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $x_1-x_2=0$, $x_3=0$ なので, 固有空間

$$W(1)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})\right\}$$

が得られ $\dim V(1)=1$ を得る. 一方 $\dim V(-1)=1$ なので,

$$\dim V(1)+\dim V(-1)=2<3$$

となり A は対角化できない. □

(2)

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

解答例

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & a & b\\ 0 & 1-\lambda & c\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}1-\lambda & a & b\\ 0 & 1-\lambda & c\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & c\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)\big(-(1-\lambda)(1+\lambda)-0\big)\\ &=-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1)\\ &=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)\\ &=0\end{aligned}$$

から, 固有値は $\lambda=1,-1$ と分かる (1 が重複). (メモ $1+1+(-1)=\mathrm{tr}A=1+1+(-1)$.)

そこで, $\dim V(-1)=1$ より $\dim V(1)=1$ ならば

$$\dim V(1)+\dim V(-1)=2<3$$

となり A は対角化できず, $\dim V(1)=2$ ならば

$$\dim V(1)+\dim V(-1)=3$$

となり A は対角化可能である. 固有空間 $V(1)$ に注目すると, $\lambda = 1$ について,

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{matrix} (3) \times (-1/2) \\ (2) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (3) - c \times (2)$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1) - b \times (2) .$$

よって

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より, $ax_2 = 0$, $x_3 = 0$.

(i) $a \neq 0$ のとき $ax_2 = 0$ から $x_2 = 0$ も得られ固有空間は

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}$$

となり $\dim V(1) = 1$ なので A は対角化できない.

(ii) $a = 0$ のとき $x_3 = 0$ なので, 固有空間は

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \right\}$$

となり $\dim V(1) = 2$ なので A は対角化可能である. □

(3) $a \geq 0$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & a^2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & a^2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & a^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - a^2) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - a^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

から, 固有値は $\lambda = 1, \pm a$ と分かる. 　(メモ $1 + a + (-a) = \mathrm{tr}A = 0 + 0 + 1.$)

そこで, $a \geq 0$ に注意して, (i) $a = 0$ のとき, (ii) $a = 1$ のとき, (iii) それ以外, で場合分けする.

(i) $a = 0$ のとき, 固有値は $\lambda = 1, 0$ であるが (0 が重複), $\dim V(1) = 1$ より, 後は $\dim V(0) = 1$ ならば
$$\dim V(1) + \dim V(0) = 2 < 3$$
となり A は対角化できず, $\dim V(0) = 2$ ならば
$$\dim V(1) + \dim V(0) = 3$$
となり A は対角化可能である. 固有空間 $V(0)$ に注目すると, $\lambda = 0$ について,
$$A - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (3). \\ (1) \end{matrix}$$
よって
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
より, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ なので, 固有空間
$$W(0) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}$$
が得られる. すなわち, つねに $\dim V(0) = 1$ が得られるので A は対角化できない.

(ii) $a = 1$ のとき, 固有値は $\lambda = 1, -1$ であるが (1 が重複), $\dim V(-1) = 1$ より, 後は $\dim V(1) = 1$ ならば
$$\dim V(1) + \dim V(-1) = 2 < 3$$
となり A は対角化できず, $\dim V(1) = 2$ ならば
$$\dim V(1) + \dim V(-1) = 3$$
となり A は対角化可能である. 固有空間 $V(1)$ に注目すると, $\lambda = 1$ について,
$$A - 1I = \begin{pmatrix} -1 & 1^2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (1) + (2). \\ \end{matrix}$$
よって
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より, $x_1 - x_2 = 0$ なので, 固有空間

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \right\}$$

が得られる. すなわち, つねに $\dim V(1) = 2$ が得られるので A は対角化可能である.

(iii) それ以外のとき, 固有値は $\lambda = 1, a, -a$ であるが,

$$\dim V(1) + \dim V(a) + \dim V(-a) = 3$$

となり A は対角化可能である. □

注　もしも, 問題が「次の行列 A が対角化可能かどうか調べよ.」だったならば (2) や (3) は以下のように解答するべきである.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & c \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big(-(1-\lambda)(1+\lambda) - 0\big) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

から, 固有値は $\lambda = 1, -1$ と分かる.　(メモ $1 + 1 + (-1) = \mathrm{tr}A = 1 + 1 + (-1)$.)

そこで, $\dim V(-1) = 1$ より $\dim V(1) = 1$ ならば

$$\dim V(1) + \dim V(-1) = 2 < 3$$

となり A は対角化できず, $\dim V(1) = 2$ ならば

$$\dim V(1) + \dim V(-1) = 3$$

となり A は対角化可能である. 固有空間 $V(1)$ に注目すると, $\lambda = 1$ について,

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (3) \times (-1/2) \\ \qquad (2) \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (3) - c \times (2) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) - b \times (2) \\ \\ \\ \end{array}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より, $a \neq 0$ であれば $ax_2 = 0$, $x_3 = 0$ なので, $x_2 = 0$ も得られ固有空間

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \right\}$$

が得られる.

(i) $a \neq 0$ のとき $ax_2 = 0$, $x_3 = 0$ なので, $x_2 = 0$ も得られ固有空間は

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}$$

となり $\dim V(1) = 1$ なので A は対角化できない.

(ii) $a = 0$ のとき $x_3 = 0$ なので, 固有空間は

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \right\}$$

となり $\dim V(1) = 2$ なので A は対角化可能である. このとき, $\lambda = -1$ について,

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 1 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) \times (1/2) \\ (2) \times (1/2). \\ \\ \end{array}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 1 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $x_1 + (b/2)x_3 = 0, x_2 + (c/2)x_3 = 0$ なので, 固有空間は

$$W(-1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -b/2 \\ -c/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

ゆえに

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -b/2\\ 0 & 1 & -c/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

によって

$$A^{-1}PA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

に対角化可能である.

(3) $a \geq 0$ とし,

$$A=\begin{pmatrix}0 & a^2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

解答例

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & a^2 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}-\lambda & a^2 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & a^2\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)(\lambda^2-a^2)\\ &=-(\lambda-1)(\lambda^2-a^2)\\ &=0\end{aligned}$$

から, 固有値は $\lambda=1,\pm a$ と分かる.　(メモ $1+a+(-a)=\mathrm{tr}A=0+0+1.$)

そこで, $a \geq 0$ に注意して, (i) $a=0$ のとき, (ii) $a=1$ のとき, (iii) それ以外, で場合分けする.

(i) $a=0$ のとき, 固有値は $\lambda=1,0$ であるが (0が重複), $\mathrm{dim}V(1)=1$ より, 後は $\mathrm{dim}V(0)=1$ ならば

$$\mathrm{dim}V(1)+\mathrm{dim}V(0)=2<3$$

となり A は対角化できず, $\mathrm{dim}V(0)=2$ ならば

$$\mathrm{dim}V(1)+\mathrm{dim}V(0)=3$$

となり A は対角化可能である. 固有空間 $V(0)$ に注目すると, $\lambda=0$ について,

$$A-0I=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}(2)\\ (3).\\ (1)\end{matrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より, $x_1=0$, $x_3=0$ なので, 固有空間

$$W(0)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})\right\}$$

が得られる. すなわち, つねに $\mathrm{dim}V(0)=1$ が得られるので A は対角化できない.

(ii) $a=1$ のとき, 固有値は $\lambda=1,-1$ であるが (1 が重複), $\mathrm{dim}V(-1)=1$ より, 後は $\mathrm{dim}V(1)=1$ ならば

$$\mathrm{dim}V(1)+\mathrm{dim}V(-1)=2<3$$

となり A は対角化できず, $\mathrm{dim}V(1)=2$ ならば

$$\mathrm{dim}V(1)+\mathrm{dim}V(-1)=3$$

となり A は対角化可能である. 固有空間 $V(1)$ に注目すると, $\lambda=1$ について,

$$A-1I=\begin{pmatrix}-1 & 1^2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{c}(2)\\ (1)+(2)\\ \\ \end{array}.$$

よって

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より, $x_1-x_2=0$ なので, 固有空間

$$W(1)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad(s,t\in\mathbb{R})\right\}$$

が得られる. すなわち, つねに $\mathrm{dim}V(1)=2$ が得られるので A は対角化可能である. このとき, $\lambda=-1$ について,

$$A-(-1)I=\begin{pmatrix}-(-1) & 1^2 & 0\\ 1 & -(-1) & 0\\ 0 & 0 & 1-(-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ (3)\\ (2)-(1)\end{array}.$$

よって

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $x_1+x_2=0, x_3=0$ なので, 固有空間は

$$W(-1)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})\right\}.$$

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって

$$A^{-1}PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対角化可能である.

(iii) それ以外のとき, 固有値は $\lambda = 1, a, -a$ であるが,

$$\mathrm{dim}V(1) + \mathrm{dim}V(a) + \mathrm{dim}V(-a) = 3$$

となり A は対角化可能である. $\lambda = 1$ について,

$$A - 1I = \begin{pmatrix} -1 & a^2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (1) \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2)+(1)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2) \times (1/(a^2-1)) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)+(2) \\ \\ \end{matrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より, $x_1 = 0, x_2 = 0$ なので, 固有空間

$$W(1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}$$

が得られる. $\lambda = a$ (ただし, $a > 0, a \neq 1$) について,

$$A - aI = \begin{pmatrix} -a & a^2 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \times (-1/a) \\ \\ (3) \times (1/(1-a)) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (3) \\ (2)-(1) \end{matrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $x_1 - ax_2 = 0, x_3 = 0$ なので, 固有空間は

$$W(a) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$\lambda=-a$ (ただし, $a>0, a\neq 1$) について,

$$A-(-a)I=\begin{pmatrix} a & a^2 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)\times(1/a) \\ \\ (3)\times(1/(1+a)) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (3) \\ (2)-(1) \end{matrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

より $x_1+ax_2=0, x_3=0$ なので, 固有空間は

$$W(-a)=\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} -a\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R}) \right\}.$$

ゆえに

$$P=\begin{pmatrix} 0 & a & -a\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

によって

$$A^{-1}PA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

に対角化可能である.

つまり, 対角化まで行うべきであるがさすがに大変.