線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　和の記号

$$\sum_{k=1,2,3} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$$

と同様に積の記号

$$\prod_{k=1,2,3} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3$$

を定義する.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

とする. 次の値を求めよ.

(1)

$$\prod_{k=1,2,3} a_k$$

答え　$a_1 \times a_2 \times a_3 = 1 \times 3 \times 5 = 15.$

(2)

$$\prod_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} \quad \left(\text{つまり} \prod_{j=1,2,3} a_{1j} \text{のこと} \right)$$

答え　$a_{11} \times a_{12} \times a_{13} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$

(3)

$$\prod_{1 \leq i \leq 3} a_{i2} \quad \left(\text{つまり} \prod_{i=1,2,3} a_{ij} \text{のこと} \right)$$

答え　$a_{12} \times a_{22} \times a_{32} = 1 \times 3 \times 9 = 13.$

(4)

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} \quad \left(\text{つまり} \prod_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)} a_{i2} \text{のこと} \right)$$

答え　$a_{12} \times a_{13} \times a_{23} = 1 \times 1 \times 4 = 4.$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 2　$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ とする

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 3} (\lambda_j - \lambda_i)$$

を計算によって確かめよ.

解答例

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \lambda_1^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= 1(\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2) - \lambda_1(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1^2(\lambda_3 - \lambda_2) \\
&= (\lambda_3 - \lambda_2)\left\{\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 + \lambda_2) + \lambda_1^2\right\} \\
&= (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \\
&= \prod_{1 \le i < j \le 3} (\lambda_j - \lambda_i).
\end{aligned}$$

問 3　$n \in \mathbb{N}$ を 2 以上の自然数とし, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とする. 次の**ヴァンデルモンドの行列式**を数学的帰納法によって証明せよ [1].

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

解答例　$k = 2$ のとき,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (\lambda_j - \lambda_i).$$

よって成立. $k = n$ のとき成立すると仮定する. $k = n + 1$ のとき行列の基本変形によって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^n - \lambda_2^{n-1}\lambda_1 & \lambda_3^n - \lambda_3^{n-1}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{pmatrix}$$

[1] ヒント: 行列の基本変形によって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^n - \lambda_2^{n-1}\lambda_1 & \lambda_3^n - \lambda_3^{n-1}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) - \lambda_1 \times (1) \\ (3) - \lambda_1 \times (2) \\ \\ (n+1) - \lambda_1 \times (n) \end{matrix}$$

と変形できるので求める行列式は変形後の行列の行列式と一致する.

と変形できるので求める行列式は変形後の行列の行列式と一致することから

$$J := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & \lambda_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^n - \lambda_2^{n-1}\lambda_1 & \lambda_3^n - \lambda_3^{n-1}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^n - \lambda_2^{n-1}\lambda_1 & \lambda_3^n - \lambda_3^{n-1}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-1} & \lambda_3^n - \lambda_3^{n-1}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^n - \lambda_3^{n-1}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & (\lambda_3 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ \lambda_2 & (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_3 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-1} & (\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \lambda_{n+1} - \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n+1}\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_{n+1}^n - \lambda_{n+1}^{n-1}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

ここで数学的帰納法の仮定より

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \times \prod_{2 \le i < j \le n+1} (\lambda_j - \lambda_i) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (\lambda_j - \lambda_i).$$

よって $k = n + 1$ のときも成立.

以上により数学的帰納法から, 2 以上のすべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して成立する. $\square$

問 4　A を n 次正方行列とし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値とする. ただし, 固有値が重複する場合にはその分だけ分けておき固有値の個数を n 個になるようにしておく. このとき次が成立することを, $n=2$ のときを参考にして $n=3$ のときを証明せよ:

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$　($=\mathrm{tr}A$ とかき A のトレースと呼ぶ);

(ii) $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \cdots \times \lambda_n = \mathrm{detA}$　($=|A|$).

参考にする証明の例　$n=2$ のとき. 固有値を求める方程式は

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A \end{aligned} \tag{1}$$

である. そこで, この式を

$$g(\lambda) := \det(A-\lambda I)$$

(これを固有多項式とよび $g(\lambda)=0$ を固有方程式とよんだりする) と定義し, λ_1, λ_2 を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1)=0, \quad g(\lambda_2)=0$$

を満たす. よって, $g(\lambda)$ は λ の 2 次式で λ^2 の係数は 1 なので

$$g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \tag{2}$$

の形をしていることが分かる. (1) と (2) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると,

$$\lambda_1+\lambda_2 = \mathrm{tr}A, \quad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{detA}$$

を得る.