線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　次の行列は対角化可能である．固有値と固有ベクトルを求めて対角化せよ．対角化のための正則行列 P も求めること．

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

よって $\det(A - \lambda I) = 0$ となるのは

$$\begin{aligned}(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 &= (\lambda-4)(\lambda-3) - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda-2)(\lambda-5) \\ &= 0\end{aligned}$$

より A の固有値は $\lambda = 2, 5$．$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2x_1 + x_2 = 0$．つまり

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

が対応する固有ベクトル．$\lambda = 5$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-x_1 + x_2 = 0$．つまり

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

が対応する固有ベクトル．以上より A は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

に対角化できる.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし, 行列式については脚注参照 [1].

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

よって $\det(A - \lambda I) = 0$ となるのは

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-\lambda & -2 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\big\{(2-\lambda)^2 + 2\big\} - 2\big\{(2-\lambda) - 2\big\} + \big\{-2 - 2(2-\lambda)\big\} \\
&= (1-\lambda)\{\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 2\} + 2\lambda - 6 + 2\lambda \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 6 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 2\lambda - 6 + 2\lambda \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\
&= -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

より A の固有値は $\lambda = 0, 2, 3$. $\lambda = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 2 \\ 2 & 2-0 & -2 \\ 1 & 1 & 2-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) - 2\times(1) \\ (3) - (1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2)\times(-1/6)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1) - 2\times(2)$$

---

[1]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

3 次の場合にはサラスの方法を用いてもよい

よって $x_1+x_2=0$, $x_3=0$. つまり

$$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad ({}^\forall t\in\mathbb{R}; t\neq 0).$$

が対応する固有ベクトル. $\lambda=2$ のとき

$$\begin{pmatrix}1-2 & 1 & 2\\ 2 & 2-2 & -2\\ 1 & 1 & 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}(3)\\(1)\\(2)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(2)+(1)\\(3)-2\times(1)\end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(2)\times(1/2)\\(2)+(3)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}(1)-(2)\\ \\ \end{matrix}$$

よって $x_1-x_3=0$, $x_2+x_3=0$. つまり

$$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad ({}^\forall t\in\mathbb{R}; t\neq 0).$$

が対応する固有ベクトル. $\lambda=3$ のとき

$$\begin{pmatrix}1-3 & 1 & 2\\ 2 & 2-3 & -2\\ 1 & 1 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}(3)\\ \\(1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(2)-2\times(1)\\(3)+(2)\end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(2)\times(-3)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}(1)-(2)\\ \\ \end{matrix}$$

よって $x_1-x_3=0$, $x_2=0$. つまり

$$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad ({}^\forall t\in\mathbb{R}; t\neq 0).$$

が対応する固有ベクトル.

以上より A は

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

に対角化できる.