線形代数及び演習II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ なる連立方程式を考える. $\lambda = 2$ について

$$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

から $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\lambda = 2$ は A の固有値ではない. 次の問いに答えよ.

(1) $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 0$ はそれぞれ A の固有値か否か調べよ.

解答例　$\lambda = 1$ のとき,

$$A\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_1, \\ 2x_1 + x_2 = x_2 \end{cases}$$

から $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\lambda = 1$ は A の固有値ではない.

$\lambda = 5$ のとき,

$$A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 5x_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

から

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R})$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

が得られるので, ${}^{\top}(x_1, x_2) = {}^{\top}(0, 0)$ 以外に解を持つ. よって $\lambda = 5$ は A の固有値である.

$\lambda = 0$ のとき,

$$
\begin{gathered}
A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}, \\
\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}
\end{gathered}
$$

から $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\lambda = 0$ は A の固有値ではない.

(2) (1) から得られた固有値 λ に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

解答例　(1) より $\lambda = 5$ が固有値であったがその解は

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R})
$$

と表現された. ${}^{\top}(x_1, x_2) = {}^{\top}(0, 0)$ は固有ベクトルと言わないので, $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0)
$$

である.

(3) $(A - 1I)^{-1}$, $(A - 5I)^{-1}$, $(A - 0I)^{-1}$ が存在するか否か調べよ.

解答例　$A - 1I$ について

$$
A - 1I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

で, $\mathrm{det} A = -8$ より逆行列が存在し

$$
(A - 1I)^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

$A - 5I$ について

$$
A - 5I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}
$$

で, $\mathrm{det} A = 0$ より逆行列は存在しない.

$A - 0I$ について

$$
A - 0I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

で, $\mathrm{det} A = -5$ より逆行列が存在し

$$
(A - 0I)^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.
$$

問 2　n 次正方行列 A に対して λ が A の固有値になるための必要十分条件は $A-\lambda I$ が正則ではない, つまり逆行列を持たないことである. 例題を参考に次の行列の固有値をすべて求めよ.

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A-\lambda I$ について

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A-\lambda I)=0$ なので

$$(3-\lambda)(1-\lambda)-8=0.$$

これを解いて

$$\begin{gathered}
(\lambda-3)(\lambda-1)-8=0, \\
\lambda^2-4\lambda+3-8=0, \\
\lambda^2-4\lambda-5=0, \\
(\lambda-5)(\lambda+1)=0, \\
\lambda=5,-1.
\end{gathered}$$

以上より A の固有値は $\lambda=5$ と $\lambda=-1$.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答例　$A-\lambda I$ について

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A-\lambda I)=0$ なので

$$\lambda^2-1=0.$$

これを解いて

$$\lambda=1,-1.$$

以上より A の固有値は $\lambda=1$ と $\lambda=-1$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解答例　$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

これを解いて

$$\lambda = 3, 2.$$

以上より A の固有値は $\lambda = 2$ と $\lambda = 3$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解答例　$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(2-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

これを解いて

$$\lambda = 2.$$

以上より A の固有値は $\lambda = 2$.

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

解答例　$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

これを解いて

$$
\begin{gathered}
(2-\lambda)\big\{-(2-\lambda)(2+\lambda)-4\big\}+2\big\{2(2+\lambda)-4\big\}+2\big\{-4-2(2-\lambda)\big\}=0, \\
-(\lambda-2)^2(\lambda+2)-4(2-\lambda)+4(2+\lambda)-8-8-4(2-\lambda)=0, \\
-(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda+2)-8+4\lambda+8+4\lambda-16-8+4\lambda=0, \\
-(\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda+8)+12\lambda-24=0, \\
\lambda^2-2\lambda^2-16\lambda+32=0, \\
(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+4)=0, \\
\lambda=2,4,-4.
\end{gathered}
$$

以上より A の固有値は $\lambda=2$ と $\lambda=4$ と $\lambda=-4$.