2023/11/13/No.5

線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　V を線形空間とする．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ が線形独立ならば, m より小さい自然数 r に対して $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ も線形独立であることを証明せよ [1]．

解答例　$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ が線形独立なので, 線形独立の定義から, もしも

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

ならば, $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ が成立する．ここで, 主張を背理法で示す．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ (ただし $1 \leq r < m$) が線形従属であると仮定する．すると判定条件を考えると, もしも

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$$

ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ 以外にも上式を成立させる定数が存在する． それを $d_1, d_2, \ldots, d_r$ とおいてみる [2]．つまり

$$d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + d_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$$

を満たしている．そこで, $d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_m = 0$ とおくと

$$(d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + d_r\boldsymbol{u}_r) + d_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + d_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0} + 0\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

となり, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ が線形独立かどうかの判定条件を満たしていることが分かる．仮定より $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ は線形独立であったので, $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ が成立するが, $d_1, d_2, \ldots, d_r$ の少なくともどれか 1 つは 0 ではなかったはずなので矛盾．よって m より小さい自然数 r に対して $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ も線形独立である．　□

問 2　V を線形空間とする．V の元に対する次の命題の真偽を調べ, 真ならば証明を, 偽ならば反例をあげよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の中に $\boldsymbol{0}$(ゼロ元) が存在するならば, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ は線形従属である．

解答例　(真) 例えば $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$ とする [3]．もしも,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

と仮定すると,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = c_1\boldsymbol{0} + 0\boldsymbol{u}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] 線形独立であることを背理法で示してみよう．

[2] このうち少なくともどれか 1 つは 0 ではないということ．

[3] 他の番号であっても証明は同じなので 1 番目が $\boldsymbol{0}$ の場合だけを示せば十分である．

なので, c_1 として 0 以外を選んできて, 例えば $c_1 = 1$ として $c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0$ を選ぶと

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = 1\boldsymbol{0} + 0\boldsymbol{u}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

が成立するので, $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 以外にも上式を成立させる定数が存在したことになる. よって $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ は線形従属である. □

(2) $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{u}_3$ が, $\boldsymbol{u}_3$ と $\boldsymbol{u}_1$ がそれぞれ線形独立ならば, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ も線形独立である [4].

解答例　(偽) $\boldsymbol{u}_1 = {}^{\mathsf{T}}(1,0)$, $\boldsymbol{u}_2 = {}^{\mathsf{T}}(0,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = {}^{\mathsf{T}}(1,1)$ を考えると $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{u}_3$ が, $\boldsymbol{u}_3$ と $\boldsymbol{u}_1$ がそれぞれ線形独立である. しかし,

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$

と線形結合で書けるので $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は線形独立ではない. □

[4] まずはざっくり色で考えてみよう. 赤と青, 青と紫, 紫と赤はそれぞれ線形独立であるが...