線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　次のベクトルの組は線形独立か否か判定せよ.

(1)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解答例　もしも $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たすならば

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (1) \\ (2) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (2)-(1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (3)+(2) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)-(3) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値であり, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を得る. よって線形独立である.

(2)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例　もしも $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たすならば

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(2)-2\times(1)\\(3)-3\times(1)\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(2)\times(-1)\\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}(1)-2\times(2)\\ \\(3)+2\times(2)\end{matrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

と同値であり,

$$\begin{cases}c_1 - c_3 = 0\\ c_2 + 2c_3 = 0\end{cases}$$

を満たす c_1, c_2, c_3 はすべて解となる．$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ の他に, 例えば $c_3 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ が解となる [1]．よって線形従属である．

(3)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

解答例　もしも $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たすならば

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\3\\4\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

---

[1] もちろんそれ以外にも解は無数にあり

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R})$$

はすべて解なので, 他には $t = 2$ のときの $c_1 = 2, c_2 = -4, c_3 = 2$ を答えてもいい．ただし, $t = 0$ 以外のときの解を一つでも例示すべき．

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

ここで,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ (2)-(1) \\ (3)-3\times(1) \\ \\ \end{matrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ (4) \\ (3) \end{matrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} (1)-(2) \\ \\ (3)+(2) \\ (4)+3\times(2) \end{matrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ (3)\times(1/3) \\ \\ \end{matrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ (2)-2\times(3) \\ \\ (3)+(4) \end{matrix}
$$

よって

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

と同値であり, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を得る. よって線形独立である.

問 2　次のベクトルの組が線形従属であるとき a の値を求めよ.

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

解答例　もしも $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たすならば

$$
c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$\star$}
$$

ここで,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ (3) \\ (2) \end{matrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ (2)-2\times(1) \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & -4 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ (3) \\ (2) \end{matrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4+a \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ (3)-a\times(2) \end{matrix}
$$

よって $a \neq 4$ であれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (3) \times (1/(a-4)) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} (1) - 2 \times (3) \\ (2) + (3) \end{matrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値であり, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を得る．この場合には線形独立となる．一方, $a = 4$ のときは,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値であり,

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$$

を満たす c_1, c_2, c_3 はすべて解となる．$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ の他に, 例えば $c_3 = 1$, $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ が解となる．よって線形従属である．以上より線形従属となるのは $a = 4$.

別解　　$(\star)$ において

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (\star)$$

この行列

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

が正則ならば (逆行列を持てば), $(\star)$ において左から A^{-1} をかけて

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって「A が正則ならば, 与えられたベクトルは線形独立」が真となる．対偶も真なので「与えられたベクトルが線形従属ならば, A が正則ではない」も真となる．よって A が正則でないことから, A の行列式は 0 となる．

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a - 4 = 0$$

より $a = 4$ を得る．