線形代数及び演習II・自習シート

問 1　$V = \mathbb{R}^3$ とし, $\boldsymbol{x} = {}^{\mathsf{T}}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とかくことにする. 次の V の部分集合 W についてそれぞれ V の線形部分空間か否か判定せよ.

(1)
$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$$

(2)
$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$$

(3)
$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \text{は整数である}\}$$

(4)
$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, x_2 + 7x_3 = 0\}$$

解答例　(1) $\boldsymbol{0} = {}^{\mathsf{T}}(0, 0, 0)$ について $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$ より $\boldsymbol{0} \in W$. 次に ${}^{\forall}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ に対して, $\boldsymbol{u} := {}^{\mathsf{T}}(u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} := {}^{\mathsf{T}}(v_1, v_2, v_3)$ とおくと, それぞれ

$$3u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 0, \quad 3v_1 - 2v_2 + 4v_3 = 0$$

を満たす. これらをたし合わせると,

$$0 = (3u_1 - 2u_2 + 4u_3) + (3v_1 - 2v_2 + 4v_3) = 3(u_1 + v_1) - 2(u_2 + v_2) + 4(u_3 + v_3)$$

より $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ が得られる. 最後に ${}^{\forall}c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$0 = c(3u_1 - 2u_2 + 4u_3) = 3(cu_1) - 2(cu_2) + 4(cu_3)$$

より $c\boldsymbol{u} \in W$ が得られる. 以上より W は V の線形部分空間である.
(2) $\boldsymbol{u} := {}^{\mathsf{T}}(1, 1, 1)$ について

$$1 + 1 + 1 = 3 \geq 0$$

より $\boldsymbol{u} \in W$ を満たす. しかしこの $\boldsymbol{u}$ の定数 $c = (-1)$ 倍について

$$c\boldsymbol{u} = (-1) \times {}^{\mathsf{T}}(1, 1, 1) = {}^{\mathsf{T}}(-1, -1, -1)$$

は

$$(-1) + (-1) + (-1) = -3 \ngeq 0$$

より $c\boldsymbol{u} \notin W$. ゆえに W は V の線形部分空間ではない.
(3) $\boldsymbol{u} := {}^{\mathsf{T}}(1, 0, 0)$ について

$$1 + 0 + 0 = 1$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

より $\boldsymbol{u} \in W$ を満たす．しかしこの $\boldsymbol{u}$ の定数 $c = 1/2 = 0.5$ 倍について

$$c\boldsymbol{u} = (1/2) \times {}^{\mathsf{T}}(1, 0, 0) = {}^{\mathsf{T}}(1/2, 0, 0)$$

は和 $cu_1 + cu_2 + cu_3$ が $1/2$ となり整数ではない．よって $c\boldsymbol{u} \notin W$．ゆえに W は V の線形部分空間ではない．

(4) $\boldsymbol{0} = {}^{\mathsf{T}}(0, 0, 0)$ について $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$, $0 + 7 \cdot 0 = 0$ より $\boldsymbol{0} \in W$．次に ${}^{\forall}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ に対して, $\boldsymbol{u} := {}^{\mathsf{T}}(u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} := {}^{\mathsf{T}}(v_1, v_2, v_3)$ とおくと, それぞれ

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 - 5u_3 = 0, \\ u_2 + 7u_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 = 0, \\ v_2 + 7v_3 = 0 \end{cases}$$

を満たす．これらをそれぞれたし合わせると,

$$0 = (2u_1 + 3u_2 - 5u_3) + (2v_1 + 3v_2 - 5v_3) = 2(u_1 + v_1) + 3(u_2 + v_2) - 5(u_3 + v_3),$$

$$0 = (u_2 + 7u_3) + (v_2 + 7v_3) = (u_2 + v_2) + 7(u_3 + v_3),$$

より $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ が得られる．最後に ${}^{\forall}c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$0 = c(2u_1 + 3u_2 - 5u_3) = 2(cu_1) + 3(cu_2) - 5(cu_3)$$

$$0 = c(u_2 + 7u_3) = (cu_2) + 7(cu_3)$$

より $c\boldsymbol{u} \in W$ が得られる．以上より W は V の線形部分空間である．

(1) と (4) の別解

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

とおくと (1) と (4) の W はそれぞれ

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\},$$

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とかける．それぞれの A と B の核でそれらは V の線形部分空間なので, W は V の線形部分空間となる．

問 2　V を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値をとる関数全体とする．この V は, ${}^{\forall}f, g \in V$, ${}^{\forall}c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(cf)(x) := c \times f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を和と定数倍, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $o(x) = 0$ という関数 o をゼロ元として線形空間となることが分かっている．

このとき, W を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値をとる**連続な**関数全体とすると, W は V の線形部分空間となることを示せ．

解答例　3条件を確かめる．まず $o \in W$ を示す．すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $o(x) = 0$ となる関数は(定数関数であり)$\mathbb{R}$ 上, 連続である．よって $o \in W$．次に $^\forall f, g \in W$ に対して f,g は $\mathbb{R}$ 上, 連続であるが, その和 $f + g$ も $\mathbb{R}$ 上, 連続である．よって $f + g \in W$．最後に $^\forall c \in \mathbb{R}$ に対して, その定数倍 cf も $\mathbb{R}$ 上, 連続である．よって $cf \in W$．以上により W は V の線形部分空間である． □

問 3　$V = \mathbb{R}^3$ とし, $W \subset V$ は V の線形部分空間であると仮定する．このとき次の手順に沿って, W におけるゼロ元 $\mathbf{0}_W$ が V のゼロ元 $\mathbf{0} = {}^\top(0, 0, 0)$ と一致することを示せ.

(i) W が線形空間であることを用いて, 線形空間 W のゼロ元 $\mathbf{0}_W$ に関する 2 条件 (講義中の (3) と (8)) を論理記号でかけ.
(3) ある $\mathbf{0}_W \in W$ が存在して, すべての $\boldsymbol{u} \in W$ に対して $\boldsymbol{u} + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$;
(8) すべての $\boldsymbol{u} \in W$ に対して $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_W$.

解答例　(3) $^\exists \mathbf{0}_W \in W$ s.t. $^\forall \boldsymbol{u} \in W$, $\boldsymbol{u} + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$;
(8) $^\forall \boldsymbol{u} \in W$, $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_W$.

(ii) $0\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$ を示せ.

解答例　(i) の (8) より, すべての $\boldsymbol{u} \in W$ に対して $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_W$ を満たすので, $0\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$ も成立する.

(iii) V が線形空間であることを用いて, 線形空間 V のゼロ元 $\mathbf{0}$ に関する条件 (8) を論理記号でかけ.
(8) すべての $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

解答例　(8) $^\forall \boldsymbol{u} \in V$, $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

(iv) $\mathbf{0}_W \in W$ が $W \subset V$ より V の元でもあることを用いて (iii) において $\boldsymbol{u}$ として $\mathbf{0}_W$ を選ぶことで $\mathbf{0}_W = \mathbf{0}$ を示せ.

解答例　(iii) において $\boldsymbol{u}$ として $\mathbf{0}_W$ を選ぶと

$$0\mathbf{0}_W = \mathbf{0}$$

を得る．よって (ii) と併せれば

$$\mathbf{0}_W = 0\mathbf{0}_W = \mathbf{0}$$