線形代数及び演習II・自習シート

問 1　次の例に従って集合のすべての元を列挙する形で書き直せ.
(例)

$$A := \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10, \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = 2m\}$$

このとき A はすべての元を列挙する形で

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

と書き直せる.
(解説)A の元はまず間違いなく自然数 $\mathbb{N}$ の元である (大前提, $n \in \mathbb{N}$ の部分). そして, 後半にある

$$1 \leq n \leq 10$$

と

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = 2m$$

を同時に満たすものだけが A の元である. よって $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. なお, 「$\leq$」の記号は「≦」のことであり, 逆の「≧」も「$\geq$」で書くことにする.

(1) $A := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 10, \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k = 2m\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

ここで注として, この答えは例題と全く同じである. つまり,

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10, \exists m \in \mathbb{N} \,\text{s.t.}\, n = 2m\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 10, \exists m \in \mathbb{N} \,\text{s.t.}\, k = 2m\}$$

を意味している. 両者の違いは文字を n で選んでいるか, k で選んでいるかの違いである. 一般に集合を

$$\{x : \text{その } x \text{ が満たすべき条件 } P(x)\}$$

を

$$\{y : \text{その } y \text{ が満たすべき条件 } P(y)\}$$

と書いても文字自体に意味は無い (ダミーインデックスといったりする). みんなが知っている最も簡単な例は

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \sum_{n=1}^{10} n$$

や

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

があげられる. これと同じことである.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(2) $B := \{q \in \mathbb{Q} : \exists n, m \in \{1,2,3,4\} \text{ s.t. } q = n/m\}$, ただし $\mathbb{Q}$ は有理数全体を意味し, n/m とは $\frac{n}{m}$ のこと.

$$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 4, \frac{4}{3}\right\}$$

(3) $C := \{f \in \mathbb{N}[x]_2 : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0, f(x) \leq 5, \}$. ただし, $\mathbb{N}[x]_2$ は自然数を係数に持つ 2 次多項式全体を意味する. 自然数を係数に持つ 2 次多項式 f を

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

とおく. このうち, 微分が 0 になるのは定数のみであるので, $c_1 = c_2 = 0$ となる. また $f(x) \leq 5$ を満たすのは $c_0 = 1,2,3,4,5$ の場合のみなので

$$C := \{1,2,3,4,5\}$$

(4) $D := \{f \in \mathbb{N}[x]_2 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 5\}$. 自然数を係数に持つ 2 次多項式 f を

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

とおく. (3) において $f'(x) = 0$ の条件が外れているが, 一方で $0 \leq f(x) \leq 5$ の条件が加わっている. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対してこの条件を満たす 1 次関数や 2 次関数は存在しない. よってやはり

$$D := \{1,2,3,4,5\}$$

となる.

問 2 V を区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値をとる連続な関数全体とする (例えば, $f(x) := x^2, g(x) := \sin x, h(x) := e^x$ とおくと, いずれも $f, g, h \in V$ である. ここでは連続とはつながっている関数と考えて十分である). このとき, V の和 $f+g$ と定数倍 af を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in [0,1]),$$

$$(af)(x) := a \times f(x) \quad (x \in [0,1]),$$

ただし, $f, g \in V$, $a \in \mathbb{R}$, で定義する (定義の意味をより詳しく説明すると, $f+g$ とは関数 f に x を代入した値 $f(x)$ と関数 g に x を代入した値をたすという新しい関数 $f+g$ を作っている. 定数倍も一緒). このとき, V は線形空間になるが, 特に以下の条件を証明せよ. (1) や (4) については解答例として載せておくのでこれをマネせよ.

(1) $\forall f, g \in V$,

$$f + g = g + f$$

解答例 関数 $f+g$ と $g+f$ が等しいことを示すにはどんな $x \in [0,1]$ に対しても $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ を示せばよい (それが関数 $f+g$ と $g+f$ が等しいことの定義だから). このとき $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{(和の定義)}\\ &= g(x) + f(x) && \text{(実数における和の性質)}\\ &= (g+f)(x) && \text{(和の定義)}\end{aligned}$$

よって $f+g = g+f$ が成立する.

(3) 関数 o を $o(x)=0$ $(x\in[0,1])$, つまりずっと 0 という関数とする．このとき $\forall f\in V$,

$$f+o=f.$$

解答例 関数 $f+o$ と f が等しいことを示すにはどんな $x\in[0,1]$ に対しても $(f+o)(x)=f(x)$ を示せばよい．このとき $\forall x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}(f+o)(x)&=f(x)+o(x) && \text{(和の定義)}\\ &=f(x)+0 && \text{(o の定義)}\\ &=f(x) && \text{(実数における和の性質)}\end{aligned}$$

よって $f+o=f$ が成立する．

(4) $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall f\in V$,

$$a(bf)=(ab)f$$

解答例 関数 $a(bf)$ と $(ab)f$ が等しいことを示すにはどんな $x\in[0,1]$ に対しても $(a(bf))(x)=((ab)f)(x)$ を示せばよい．このとき $\forall x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}(a(bf))(x)&=a\times((bf)(x)) && \text{(関数 bf の定数 a 倍の定義)}\\ &=a\times(b\times f(x)) && \text{(関数 f の定数 b 倍の定義)}\\ &=(a\times b)\times f(x) && \text{(実数における積の性質)}\\ &=((ab)f)(x) && \text{(関数 f の定数 ab 倍の定義)}\end{aligned}$$

よって $a(bf)=(ab)f$ が成立する．

(5) $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall f\in V$,

$$(a+b)f=af+bf$$

解答例 関数 $(a+b)f$ と $af+bf$ が等しいことを示すにはどんな $x\in[0,1]$ に対しても $((a+b)f)(x)=(af+bf)(x)$ を示せばよい．このとき $\forall x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}((a+b)f)(x)&=(a+b)\times f(x) && \text{(関数 f の定数 $a+b$ 倍の定義)}\\ &=(a\times f(x))+(b\times f(x)) && \text{(実数における分配法則)}\\ &=(af)(x)+(bf)(x) && \text{(関数 f の定数 a 倍と b 倍の定義)}\\ &=(af+bf)(x) && \text{(関数 af と bf の和の定義)}\end{aligned}$$

よって $(a+b)f=af+bf$ が成立する．

(6) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall f,g\in V$,

$$a(f+g)=af+ag$$

解答例 関数 $a(f+g)$ と $af+ag$ が等しいことを示すにはどんな $x\in[0,1]$ に対しても $(a(f+g))(x)=(af+ag)(x)$ を示せばよい．このとき $\forall x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}(a(f+g))(x)&=a\times(f+g)(x) && \text{(関数 $f+g$ の定数 a 倍の定義)}\\ &=a\times(f(x)+g(x)) && \text{(関数 $f+g$ の定義)}\\ &=a\times f(x)+a\times g(x) && \text{(実数における分配法則)}\\ &=(af)(x)+(ag)(x) && \text{(関数 f の定数 a 倍と関数 g の a 倍の定義)}\\ &=(af+ag)(x) && \text{(関数 af と ag の和の定義)}\end{aligned}$$

よって $a(f+g)=af+ag$ が成立する．

(7) $\forall f \in V$,

$$1f = f$$

解答例 関数 $1f$ と f が等しいことを示すにはどんな $x \in [0,1]$ に対しても $(1f)(x) = f(x)$ を示せばよい．このとき $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} (1f)(x) &= 1 \times f(x) \qquad (\text{関数 } f \text{ の定数 } 1 \text{ 倍の定義}) \\ &= f(x) \qquad (\text{実数における性質}) \end{aligned}$$

よって $1f = f$ が成立する．

(8) $\forall f \in V$,

$$0f = o$$

解答例 関数$0f$ とoが等しいことを示すにはどんな$x \in [0,1]$ に対しても $(0f)(x) = o(x)$ を示せばよい．このとき $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} (0f)(x) &= 0 \times f(x) \qquad (\text{関数 } f \text{ の定数 } 0 \text{ 倍の定義}) \\ &= 0 \qquad (\text{実数における性質}) \end{aligned}$$

よって $0f(x) = 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して成立する．(3) で構成したようにそのような関数を o とかいたので

$$0f = o$$

が成立する．

なお番号は線形空間の定義に用いた番号とそろえてある．

問 3　講義中に述べた 2 つの命題 P と Q について考察する．

$$P : \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ で } n \text{ は偶数 } \boxed{\exists m \in \mathbb{N}; \text{ s.t. } \boxed{n = 2m}}}$$

を論理記号を用いずに日本語でつらつらと表現すると,
「すべての偶数 (自然数) に対して, ある自然数 m が存在して, 偶数 n は $2m$ とかける, つまり $n = 2m$」といった表現ができる．この命題は真である．実際, 偶数 n を選ぶたびに (それに応じて決まる自然数 m_n が存在して), 偶数 n は $2m_n$ と表現できる．では

$$Q : \boxed{\exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ で } n \text{ は偶数}, \boxed{n = 2m}}}$$

を論理記号を用いずに日本語でつらつらと表現せよ．そしてその命題は偽であることを解説せよ (ヒント: そんな最強な自然数 m が存在するのか?).

解答例　例えば命題 Q は「ある自然数 m が存在して, すべての偶数 n に対して $n = 2m$ とかける」という意味になる．もっとつらつらと書くと,「とっても素晴らしい最強の自然数 m が存在して, この世界のありとあらゆる偶数 (すべての偶数)n をたった 1 つの m を用いて全部 $n = 2m$ とかける」という意味になる．反例として偶数を 6, 10 として 2 つ取ってくると $6 = 2 \times 3$ とかけるが同じ $m = 3$ で 10 を 2×3 とは決して表せない．同一の m で表現できる偶数は一つだけである．よってこの命題 Q は偽である．