2023/12/13/No.12

線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　$V := \mathbb{R}^{n\times n}$, つまり n 次正方行列とする. $A, B \in V$ に対して,

$$(A,B) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \text{のこと, つまり } a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{1n} + a_{21}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{nn}\right)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $(\cdot,\cdot)$ は V の内積になることを証明せよ.

解答例　内積の定義を満たすことを示す. $A, B, C \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(i)

$$(A,A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0.$$

特に $(A,A) = 0$ のとき,

$$(A,A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$$

となり, $a_{ij} = 0$ がすべての $i, j = 1, \cdots, n$ に対して成立する. よって $A = O$. 逆に $A = O$ のとき, $a_{ij} = 0$ がすべての $i, j = 1, \cdots, n$ に対して成立する. よって

$$(A,A) = \sum_{i,j=1}^{n} 0^2 = 0.$$

(以上より内積の第 1 条件を満たす.)

(ii)

$$\begin{aligned}(A,B) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}a_{ij} \\ &= (B,A).\end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(以上より内積の第 2 条件を満たす.)
(iii)

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} (A+B, C) &= \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij})c_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}c_{ij} \\ &= (A, C) + (B, C). \end{aligned}$$

(以上より内積の第 3 条件を満たす.)
(iv)

$$cA := c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \cdots & \cdots & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} (cA, B) &= \sum_{i,j=1}^{n} (ca_{ij})b_{ij} \\ &= c\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \\ &= c(A, B). \end{aligned}$$

(以上より内積の第 4 条件を満たす.)

(i) から (iv) より $(\cdot,\cdot)$ は V の内積である. □

(2)

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^{\mathsf{T}}AB)$$

となることを計算して確認せよ[1].

解答例　$A, B \in V$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}({}^{\mathsf{T}}AB) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1}b_{i1} & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{i1}b_{in} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in}b_{i1} & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{in}b_{in} \end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij}b_{ij} \right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} \\
&= (A, B).
\end{aligned}
$$

問 2　$V := C([a,b])$ または $\mathbb{R}[x]_n$ とする．$f, g \in V$ に対して,

$$
(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dx
$$

とおくと, $(\cdot, \cdot)$ は V の内積になることを証明せよ．

解答例　内積の定義を満たすことを示す．$f, g, h \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする．

(i)

$$
(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0.
$$

特に $(f, f) = 0$ のとき,

$$
(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx = 0
$$

となり, $f(x) = 0$ がすべての $x \in [a, b]$ に対して成立する．よって $f = 0$. 逆に $f = 0$ のとき, $f(x) = 0$ がすべての $x \in [a, b]$ に対して成立する．よって

$$
(f, f) = \int_a^b 0^2 dx = 0
$$

---

1)

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

とおくと

$$
{}^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

のことであるので,

$$
{}^{\mathsf{T}}AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
$$

に注意する．また tr は行列の対角成分の和を意味する．

(以上より内積の第 1 条件を満たす.)
(ii)

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_a^b f(x)g(x)dx \\ &= \int_a^b g(x)f(x)dx \\ &= (g,f).\end{aligned}$$

(以上より内積の第 2 条件を満たす.)
(iii) $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}(f+g,h) &= \int_a^b (f+g)(x)h(x)dx \\ &= \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx \\ &= (f,h)+(g,h).\end{aligned}$$

(以上より内積の第 3 条件を満たす.)
(iv) $(cf)(x) := c \times f(x)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}(cf,g) &= \int_a^b (cf)(x)g(x)dx \\ &= \int_a^b c \times f(x)g(x)dx \\ &= c\int_a^b f(x)g(x)dx \\ &= c(f,g).\end{aligned}$$

(以上より内積の第 4 条件を満たす.)

(i) から (iv) より $(\cdot,\cdot)$ は V の内積である. □