2023/12/12/No.11

線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　$a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ とし, $f, g \in C([a,b])$ を考える [1]. 次のミンコフスキーの不等式を手順に従い証明せよ:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

(i)

$$\alpha := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta := \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく. α か β の少なくともどちらか一方が 0 ならば (1) が成立していることを証明せよ.

解答例　$\alpha = 0$ とする. このとき

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

なので, $|f(x)| = 0$ がすべての $x \in [a,b]$ について成立する. すなわち $f = 0$ である. よって

$$(\text{左辺}) = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |0+g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \alpha + \beta = (\text{右辺}).$$

$\beta = 0$ でも同様に証明できる. よって成立. □

(ii) $\alpha, \beta > 0$ とする. 新しく関数 $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) := \frac{1}{\alpha} f(x), \quad G(x) := \frac{1}{\beta} g(x)$$

とおく. このとき,

$$\left(\int_a^b |F(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \left(\int_a^b |G(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

を証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] つまり $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ で $[a,b]$ 上連続な関数全体.

解答例

$$
\begin{aligned}
\left(\int_a^b |F(x)|^2 dx\right)^{1/2} &= \left(\int_a^b |\frac{1}{\alpha}f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_a^b \frac{1}{\alpha^2}|f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha^2}\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\alpha}\alpha \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

$G(x)$ についても同様に計算できる. よって成立. □

(iii) いま,

$$
\begin{aligned}
|f(x)+g(x)|^2 &\le \big||f(x)|+|g(x)|\big|^2 \\
&= \left|\alpha\frac{1}{\alpha}|f(x)|+\beta\frac{1}{\beta}|g(x)|\right|^2 \\
&= \big|\alpha|F(x)|+\beta|G(x)|\big|^2 \\
&= (\alpha+\beta)^2\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}|F(x)|+\frac{\beta}{\alpha+\beta}|G(x)|\right|^2
\end{aligned}
$$

が成立している. $\lambda := \alpha/(\alpha+\beta)$ とおき, 自習シート No.10 の問 1 の (2) を用いれば,

$$
|f(x)+g(x)|^2 \le (\alpha+\beta)\left(\alpha|F(x)|^2+\beta|G(x)|^2\right)
$$

が成立することを証明せよ.

解答例 $\lambda := \alpha/(\alpha+\beta)$ とおくと, $\beta/(\alpha+\beta) = 1-\lambda$ であることに注意して

$$
\begin{aligned}
|f(x)+g(x)|^2 &\le (\alpha+\beta)^2\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}|F(x)|+\frac{\beta}{\alpha+\beta}|G(x)|\right|^2 \\
&= (\alpha+\beta)^2\left(\lambda|F(x)|+(1-\lambda)|G(x)|\right)^2 \\
&\le (\alpha+\beta)^2\left(\lambda|F(x)|^2+(1-\lambda)|G(x)|^2\right) \\
&= (\alpha+\beta)^2\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}|F(x)|^2+\frac{\beta}{\alpha+\beta}|G(x)|^2\right) \\
&= (\alpha+\beta)\left(\alpha|F(x)|^2+\beta|G(x)|^2\right).
\end{aligned}
$$

よって成立. □

(iv) ミンコフスキーの不等式 (1) を証明せよ.

解答例　上記式より

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx &\leq \int_a^b (\alpha+\beta)\left(\alpha|F(x)|^2+\beta|G(x)|^2\right)dx \\
&\leq (\alpha+\beta)\int_a^b \left(\alpha|F(x)|^2+\beta|G(x)|^2\right)dx \\
&= (\alpha+\beta)\alpha\int_a^b |F(x)|^2 dx + (\alpha+\beta)\beta\int_a^b |G(x)|^2 dx \\
&= (\alpha+\beta)\alpha + (\alpha+\beta)\beta \\
&= (\alpha+\beta)^2
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}
$$

が成立する. □

問 2　$V := C([a,b])$ または $\mathbb{R}[x]_n$ とする. $f \in V$ に対して

$$
\|f\| := \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}
$$

と定義すると, $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ.

解答例　ノルムの 3 条件を満たすことを示す. $f, g \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする.
(i)

$$
\|f\| = \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \geq 0.
$$

さらに, $\|f\| = 0$ ならば, すべての $x \in [a,b]$ に対して $|f(x)|^2 = 0$. よって $f = 0$($f = f_0$ や $f = o$ と書いてもよい. すべてゼロ元の意味). 逆に, $f = 0$ のとき

$$
\|f\| = \left\{\int_a^b |0|^2 dx\right\}^{1/2} = 0
$$

よってノルムの第 1 条件を満たす.
(ii) $(cf)(x) = c \times f(x)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\|cf\| &= \left\{\int_a^b |(cf)(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_a^b |c \times f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_a^b |c|^2|f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \\
&= |c|\left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \\
&= |c|\|f\|.
\end{aligned}
$$

よってノルムの第 2 条件を満たす.
(iii) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ に注意して, ミンコフスキーの不等式を用いれば

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \left\{ \int_a^b |(f+g)(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

よってノルムの第 3 条件を満たす.

以上より $\|\cdot\|$ は V のノルムである. $\square$