線形代数及び演習 II・自習シート

問 1　$a, b \in \mathbb{R}$ とすると次のヤングの不等式

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

が成立する．これを用いて次の不等式を証明せよ．

(1) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とすると [1)]

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

(2) $\lambda \in (0, 1)$, $A, B \in \mathbb{R}$ とすると [2)]

$$(\lambda A + (1-\lambda)B)^2 \leq \lambda A^2 + (1-\lambda)B^2.$$

解答例　(1) 左辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}
0 \leq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 &= a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \\
&\leq a_1^2 b_1^2 + 2\left(\frac{1}{2}(a_1 b_2)^2 + \frac{1}{2}(a_2 b_1)^2\right) + a_2^2 b_2^2 \\
&= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)
\end{aligned}$$

よって両辺 1/2 乗すれば

$$\sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

ゆえに

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

(2) 左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
(\lambda A + (1-\lambda)B)^2 &= \lambda^2 A^2 + 2\lambda(1-\lambda)AB + (1-\lambda)^2 B^2 \\
&\leq \lambda^2 A^2 + 2\left(\frac{1}{2}(\lambda - \lambda^2)A^2 + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^2)B^2\right) + (1-\lambda)^2 B^2 \\
&= (\lambda^2 + \lambda - \lambda^2)A^2 + (\lambda - \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2)B^2 \\
&= \lambda A^2 + (1-\lambda)B^2.
\end{aligned}$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

1) ヤングの不等式より

$$(a_1 b_2)(a_2 b_1) \leq \frac{1}{2}(a_1 b_2)^2 + \frac{1}{2}(a_2 b_1)^2$$

を用いるとよい．

2) $\lambda \in (0, 1)$ とすると $\lambda - \lambda^2 > 0$ なのでヤングの不等式

$$\lambda(1-\lambda)AB = \sqrt{\lambda - \lambda^2}A\sqrt{\lambda - \lambda^2}B \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^2)A^2 + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^2)B^2$$

を用いるとよい．

問 2　$V := \mathbb{C}$ とする．$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|\alpha\| := \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{ただし}, \alpha = a+bi$$

と定義すると，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{C}$ のノルムになることを証明せよ．

解答例　ノルムの 3 条件を満たすことを示す．$\alpha := a+bi, \beta := u+vi \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ とする．
(i)

$$\|\alpha\| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0.$$

さらに，$\|\alpha\| = 0$ ならば $\sqrt{a^2+b^2} = 0$．よって $a = 0, b = 0$．つまり $\alpha = 0$．逆に，$\alpha = 0 = 0+0i$ のとき

$$\|\alpha\| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$$

よってノルムの第 1 条件を満たす．
(ii) $c\alpha = (ca)+(cb)i$ に注意して

$$\begin{aligned}\|c\alpha\| &= \sqrt{(ca)^2+(cb)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a^2+b^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2+b^2} \\ &= |c|\sqrt{a^2+b^2} \\ &= |c|\|\alpha\|.\end{aligned}$$

よってノルムの第 2 条件を満たす．
(iii) $\alpha+\beta = (a+bi)+(u+vi) = (a+u)+(b+v)i$ に注意して

$$\begin{aligned}\|\alpha+\beta\|^2 &= (a+u)^2+(b+v)^2 \\ &= a^2+2au+u^2+b^2+2bv+v^2 \\ &= (a^2+b^2)+2(au+bv)+(u^2+v^2) \\ &\leq \|\alpha\|^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{u^2+v^2}+\|\beta\|^2 \\ &= \|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|^2+\|\beta\|^2 \\ &= (\|\alpha\|+\|\beta\|)^2.\end{aligned}$$

よって

$$\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|+\|\beta\|$$

が，つまりノルムの第 3 条件を満たす．
　以上より $\|\cdot\|$ は $\mathbb{C}$ のノルムである．　□

問 3　$V := C([0,1])$，すなわち区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体とする．$f \in C([0,1])$ に対して

$$\|f\| := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

と定義すると，$\|\cdot\|$ は $C([0,1])$ のノルムになることを証明せよ[3]．

[3] $\max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ とは区間 $[0,1]$ 内の点 x に対する $|f(x)|$ の最大値を表す．例えば $f(x) = x^2+1$ ならば

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| = |f(1)| = 2.$$

$g(x) = -2x+1$ ならば

$$\max_{x\in[0,1]} |g(x)| = |g(0)| = |g(1)| = 1$$

解答例　ノルムの 3 条件を満たすことを示す. $f, g \in C([0,1])$, $c \in \mathbb{R}$ とする.
(i)

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq |f(0)| \geq 0.$$

さらに, $\|f\| = 0$ ならばすべての $x \in [0,1]$ に対して $|f(x)| = 0$. つまり $f = f_0$ (f_0 とは $f_0(x) = 0$ である定数関数, $C([0,1])$ のゼロ元). 逆に, $f = f_0$ のとき

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$$

よってノルムの第 1 条件を満たす.
(ii) $(cf)(x) = c \times f(x)$ に注意して

$$\begin{aligned}
\|cf\| &= \max_{x\in[0,1]} |(cf)(x)| \\
&= \max_{x\in[0,1]} |c \times f(x)| \\
&= \max_{x\in[0,1]} |c||f(x)| \\
&= |c| \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \\
&= |c|\|f\|.
\end{aligned}$$

よってノルムの第 2 条件を満たす.
(iii) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ に注意して

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \max_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \\
&= \max_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)| \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} \{|f(x)| + |g(x)|\} \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)| \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

よってノルムの第 3 条件を満たす.
　以上より $\|\cdot\|$ は $C([0,1])$ のノルムである.　□