

線形代数及び演習 II ・ 自習シート

問1 次の否定を述べよ.

(例) 「すべての都道府県を彼は旅した。」

否定 「ある都道府県があって、彼はその都道府県を旅していない。」
「すべての都道府県を彼は旅していない」は言い過ぎ.

(1) 「すべての数理の学生は成績が90点以上だ。」

否定 「ある学生が数理にいて、成績が90点未満だ。」
「すべての数理の学生は成績が90点未満だ」は言い過ぎ.

(2) 「数理にはある先生がいて、その先生は私の成績に不可をつける。」

否定 「数理のすべての先生が、私の成績に不可をつけない。」
「数理にはある先生がいて、その先生は私の成績に不可をつけない」では足りない.

(3) 「ある龍大生がいて、その龍大生は龍大のすべての講義を受講している。」

否定 「すべての龍大生に対して、ある講義があって、その龍大生はその講義を受講していない。」

問2 実数の集合を \mathbb{R} とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を記号で書け.

(0) $a \in E$.

(1) すべての $x \in E$ に対して, $x \geq a$ が成立する.

(2) ある $x_1 \in E$ が存在して, $x_1 < b$.

(3) ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in E$ に対して, $x \leq K$ が成立する.

解答例 (0) 「 $a \in E$ 」の否定なので

$$a \notin E.$$

「 $a \in E$ ではない」, というように「ではない」だけつけるような, 否定の作り方は十分ではない.

(1) 「すべての $x \in E$ に対して $x \geq a$ 」の否定なので, 「ある $x_0 \in E$ が存在して (1つだけでいい) それが反例となる。」つまり

$$\text{ある } x_0 \in E \text{ が存在して } x_0 < a.$$

(2) 「ある $x_1 \in E$ が存在して $x_1 < b$ 」の否定なので、「すべての $x \in E$ に対して $x < b$ を満たさないということ」、つまり

すべての $x \in E$ に対して $x \geq b$.

(3) 「ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して、すべての $x \in E$ に対して $x \leq K$ 」の否定なので

すべての $K \in \mathbb{R}$ に対して、ある $x_K \in E$ が存在して $x_K > K$.

注 (1) や (3) では「ある... が存在して」と言う場合に、 x に x_0 や x_K のような添え字 (0 や K) がついているが、別につける必要は無い。単純に「ある... が存在して」という場合、特別感を出したいがために添え字がついている。特に (3) では x が K ごとに変わるので x_K のように K をつけている。実際、問 2 の (3) は問 1 の (3) とリンクしているが、構造は「すべての龍大生 K に対して、ある講義 x_K があって...」となっており、講義は龍大生ごとに異なってもいいことを意味している。